

Câu 1. (2.0đ) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lồi trên tập lồi $X \subset \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng với mọi $x^1, x^2, \dots, x^k \in X$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ thì $f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x^i)$.

Câu 2. (3.0đ) (i) Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi. Trình bày thuật toán hướng giảm gradient giải bài toán $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, với cách chọn cỡ bước quay lui.

(ii) Xét bài toán

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + 2x_2^2.$$

Xuất phát từ điểm $x^0 = (2, 1)^T$, tính điểm x^1 trong bước lặp tiếp theo của thuật toán hướng giảm gradient với cách chọn cỡ bước phù hợp. Giải thích cho sự lựa chọn cỡ bước này của em?

Câu 3. (5.0đ) Cho hàm số $f(x) = 2\alpha x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$, (trong đó α là ngày sinh của bạn).

(i) $f(x)$ có thỏa mãn điều kiện bức trên trên \mathbb{R}^2 không? Vì sao?

(ii) Kiểm tra sự tồn tại nghiệm tối ưu của bài toán $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ và $\max_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$? Giải thích cho kết luận của em?

(iii) Bài toán $\min\{-f(x) \mid 3x_1 + x_2 \leq 15, 2x_1 - 3x_2 \leq 6, x_2 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0\}$ có phải là bài toán tối ưu lồi không? Bài toán này có nghiệm tối ưu không? Nếu có, hãy tìm nghiệm đó.

Note: - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.

Câu 1. (2.0đ) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lõm trên tập lồi $X \subset \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng với mọi $x^1, x^2, \dots, x^k \in X$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ thì

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i\right) \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x^i).$$

Câu 2. (3.0đ) (i) Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi. Trình bày thuật toán hướng giảm gradient giải bài toán $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, với cách chọn cỡ bước quay lui.

(ii) Xét bài toán

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2.$$

Xuất phát từ điểm $x^0 = (1, 2)^T$, tính điểm x^1 trong bước lặp tiếp theo của thuật toán hướng giảm gradient với cách chọn cỡ bước phù hợp. Giải thích cho sự lựa chọn cỡ bước này của em?

Câu 3. (5.0đ) Cho hàm số

$$f(x) = x_1^2 + 2\alpha x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1,$$

(trong đó α là ngày sinh của bạn).

(i) $f(x)$ có thỏa mãn điều kiện bức trên trên \mathbb{R}^n không? Vì sao?

(ii) Kiểm tra sự tồn tại nghiệm tối ưu của bài toán $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ và $\max_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$? Giải thích cho kết luận của em?

(iii) Bài toán $\min\{-f(x) \mid 3x_2 + x_1 \leq 15, 2x_1 - 3x_2 \leq 6, x_1 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0\}$ có phải là bài toán tối ưu lồi không? Bài toán này có nghiệm tối ưu không? Nếu có, hãy tìm nghiệm đó.

Note: - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.