

- Chú ý:**
- Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
  - Nộp lại đề thi cùng bài thi.
  - Giá trị của  $\alpha$  trong đề thi này **bằng chữ số cuối cùng của MSSV của sinh viên.**

**Câu 1. (1.5 đ)** (i) Xét bài toán

$$\min\{f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 120x_1 \mid (x_1 - \alpha - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \leq (\alpha + \frac{1}{2})^2, x_1 - 2x_2 \leq 2\alpha + 1\}.$$

Cho  $x^1 = (2\alpha + 1, 0)^T$  và  $x^2 = (0, 0)^T$ . Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, kiểm tra  $x^1$  và  $x^2$  có phải nghiệm của bài toán trên hay không?

(ii) Cho  $b, c \in \mathbb{R}_+^n$ . CMR: Nếu  $\bar{x}$  là nghiệm tối ưu của bài toán

$$\min\{\langle c, x \rangle \mid b^T x \geq \alpha\}$$

$$\text{thì } b^T \bar{x} = \alpha.$$

**Câu 2. (4.0 đ)** Cho bài toán

$$\begin{array}{ll} \min & (\alpha + 1)x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{v.đ.k.} & \begin{array}{lll} -x_1 & +x_2 & -x_3 = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- (i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này.
- (ii) Bài toán đối ngẫu có nghiệm tối ưu hay không?
- (iii) Sử dụng Pha I của thuật toán đơn hình, tìm một phương án cực biên  $\hat{x}$  của bài toán trên.
- (iv) Sử dụng định lý độ lệch bù kiểm tra xem  $\hat{x}$  có phải là nghiệm tối ưu của bài toán đã cho hay không?

**Câu 3. (3.0đ)** Cho hàm số

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3\alpha x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$

- (i) Hàm số trên có lồi hay lõm không? Bài toán  $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$  có nghiệm tối ưu hay không? Vì sao?
- (ii) Tìm tập các điểm dừng của hàm  $f(x)$  và kiểm tra xem điểm dừng đó có phải là cực tiểu địa phương của  $f(x)$  hay không?
- (iii) Nếu áp dụng thuật toán hướng giảm gradient cho bài toán  $\min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x)$  thì bạn nên sử dụng cách chọn cỡ bước nào trong hai cách: theo thủ tục tìm chính xác theo tia hay thủ tục quay lui? Giải thích vì sao?

**Câu 4. (1.5 đ)** Giải bài toán sau bằng thuật toán nhánh cận

$$\max\{3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \mid 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 11, x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4\}$$

- Chú ý:**
- Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
  - Nộp lại đề thi cùng bài thi.
  - Giá trị của  $\alpha$  trong đề thi này **bằng chữ số cuối cùng của MSSV của sinh viên.**

**Câu 1. (1.5 đ)** (i) Xét bài toán

$$\min\{f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 120x_1 \mid (x_1 - \alpha - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \leq (\alpha + \frac{1}{2})^2, x_1 - 2x_2 \leq 2\alpha + 1\}.$$

Cho  $x^1 = (2\alpha + 1, 0)^T$  và  $x^2 = (0, 0)^T$ . Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, kiểm tra  $x^1$  và  $x^2$  có phải nghiệm của bài toán trên hay không?

(ii) Cho  $b, c \in \mathbb{R}_+^n$  và  $a \in \mathbb{R}$ . CMR: Nếu  $\bar{x}$  là nghiệm tối ưu của bài toán

$$\min\{\langle c, x \rangle \mid b^T x \geq a\}$$

$$\text{thì } b^T \bar{x} = a.$$

**Câu 2. (4.0 đ)** Cho bài toán

$$\begin{array}{ll} \min & (\alpha + 1)x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{v.đ.k.} & \begin{array}{rrr} -x_1 & +x_2 & -x_3 = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- (i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này.
- (ii) Bài toán đối ngẫu có nghiệm tối ưu hay không?
- (iii) Sử dụng Pha I của thuật toán đơn hình, tìm một phương án cực biên  $\hat{x}$  của bài toán trên.
- (iv) Sử dụng định lý độ lệch bù kiểm tra xem  $\hat{x}$  có phải là nghiệm tối ưu của bài toán đã cho hay không?

**Câu 3. (3.0đ)** Cho hàm số

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\alpha x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$

- (i) Hàm số trên có lồi hay lõm không? Bài toán  $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$  có nghiệm tối ưu hay không? Vì sao?
- (ii) Tìm tập các điểm dừng của hàm  $f(x)$  và kiểm tra xem điểm dừng đó có phải là cực tiểu địa phương của  $f(x)$  hay không?
- (iii) Nếu áp dụng thuật toán hướng giảm gradient cho bài toán  $\min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x)$  thì bạn nên sử dụng cách chọn cỡ bước nào trong hai cách: theo thủ tục tìm chính xác theo tia hay thủ tục quay lui? Giải thích vì sao?

**Câu 4. (1.5 đ)** Giải bài toán sau bằng thuật toán nhánh cận

$$\max\{3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \mid 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 11, x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4\}$$