

Chú ý: - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.

Câu 1. (2.0đ) Cho bài toán min $\{f(x) : x \in C\}$, trong đó $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi khả vi và $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng. CMR: $x^0 \in \operatorname{argmin}\{f(x) \mid x \in C\}$ khi và chỉ khi

$$\min\{\langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle \mid x \in C\} = 0.$$

Câu 2. (3.0đ) Cho bài toán QHTT

$$\max\{2x_1 + x_2 \mid 3x_1 - 2x_2 \geq 4, -2x_1 + x_2 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

- (i) Giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình hai pha.
(ii) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu thu được.

Câu 3. (2.0 đ) Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng, khác rỗng, $z \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Hình chiếu của z trên C được xác định là điểm thuộc C có khoảng cách gần nhất với z . CMR: hình chiếu của z trên C luôn tồn tại và duy nhất. Nếu C không lồi thì kết luận này còn đúng nữa không? Tại sao?

Câu 4. (3.0 đ) Xét bài toán

$$\max\{f(x) = x_2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \leq 2\} \quad (P).$$

Bài toán (P) đã cho ở trên có phải bài toán tối ưu lồi không? Bài toán (P) có nghiệm tối ưu toàn cục không? Vì sao? Nếu có hãy tìm nghiệm tối ưu toàn cục đó bằng phương pháp nhân tử Lagrange.

Chú ý: - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.

Câu 1. (2.0đ) Cho bài toán $\min\{g(x) : x \in D\}$, trong đó $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi khả vi và $D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng. CMR: $x^1 \in \operatorname{argmin}\{g(x) \mid x \in D\}$ khi và chỉ khi

$$\min\{\langle \nabla g(x^1), x - x^1 \rangle \mid x \in D\} = 0.$$

Câu 2. (3.0đ) Cho bài toán QHTT

$$\max\{2x_2 + x_1 \mid 3x_2 - 2x_1 \geq 4, -2x_2 + x_1 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

(i) Giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình hai pha.

(ii) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu thu được.

Câu 3. (2.0 đ) Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng, $y \in \mathbb{R}^n \setminus D$. Hình chiếu của y trên D được xác định là điểm thuộc D có khoảng cách gần nhất với y . CMR: hình chiếu của y trên D luôn tồn tại và duy nhất. Nếu D không lồi thì kết luận này còn đúng nữa không? Tại sao?

Câu 4. (3.0 đ) Xét bài toán

$$\max\{g(x) = x_1 \mid (x_2 + 1)^2 + x_1^2 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \leq 2\} \quad (P).$$

Bài toán (P) đã cho ở trên có phải bài toán tối ưu lồi không? Bài toán (P) có nghiệm tối ưu toàn cục không? Vì sao? Nếu có hãy tìm nghiệm tối ưu toàn cục đó bằng phương pháp nhân tử Lagrange.