

**Câu 1. (1.0đ)** Cho bài toán  $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ . CMR: Nếu sử dụng phương pháp Newton thuần túy để giải bài toán này với  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ , trong đó  $A$  là ma trận cấp  $n$ , đối xứng, xác định dương, không suy biến,  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ , thì ta sẽ nhận được ngay một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán này chỉ sau một vòng lặp và không phụ thuộc vào điểm xuất phát ban đầu.

**Câu 2. (2.0đ)** Cho bài toán

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{v.đ.k.} & \begin{array}{lll} 2x_1 & -4x_2 & +2x_3 \leq 8 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_3 & \geq 0, x_2 \leq 0 \end{array} \end{array}$$

- (i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này và giải nó bằng phương pháp hình học.
- (ii) Sử dụng đối ngẫu để tìm nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu.

**Câu 3. (3.0 đ)** Xét bài toán  $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$  với

$$f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$$

- (i) Hãy viết điều kiện bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán trên?
- (ii) Điểm  $x^0 = (0, 0)^T$  có phải là nghiệm tối ưu địa phương không? Vì sao? Nếu không, hãy tìm một hướng giảm  $p$  của hàm  $f(x)$  tại  $x^0$ .
- (iii) Trên tia xuất phát từ  $x^0$  theo hướng  $p$  em đã chọn ở phần (ii), hãy tìm một điểm  $x^1$  tốt hơn  $x^0$  theo phương pháp tìm chính xác theo tia.

**Câu 4. (2.0 đ)** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính  $\min\{\langle c, x \rangle \mid x \in D\}$ , trong đó  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  và  $D \subset \mathbb{R}^n$  là một đa diện.

- (i) Cho đỉnh  $v^0 \in D$ . Giả sử rằng  $v^0$  có đúng  $k$  đỉnh kề là  $v^1, v^2, \dots, v^k$  và

$$\langle c, v^0 \rangle \leq \langle c, v^i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

$$\text{CMR: } v^0 \in \operatorname{argmin}\{\langle c, x \rangle \mid x \in D\}.$$

- (ii) Định nghĩa tập lồi. CMR: tập nghiệm của bài toán QHTT là tập lồi.

**Câu 5. (2.0 đ)** Xét bài toán

$$\min\{f(x) = \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \mid x_2 - x_1^2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Điểm  $x^0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)^T$  có phải nghiệm của bài toán trên hay không? Chứng minh kết luận của em bằng ít nhất hai cách?

**Note:** - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.  
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.

**Câu 1. (2.0 đ)** Xét bài toán

$$\min\{f(x) = \left(x_2 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_1 - 2)^2 \mid x_1 - x_2^2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Điểm  $x^0 = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)^T$  có phải nghiệm của bài toán trên hay không? Chứng minh kết luận của em bằng ít nhất hai cách?

**Câu 2. (2.0 đ)** Cho bài toán

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{v.đ.k.} & \begin{array}{lll} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 \leq 8 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- (i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này và giải nó bằng phương pháp hình học.
- (ii) Sử dụng đối ngẫu để tìm nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu.

**Câu 3. (3.0 đ)** Xét bài toán  $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$  với

$$f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2 + e^{x_1+x_2}$$

- (i) Hãy viết điều kiện bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán trên?
- (ii) Điểm  $x^0 = (0, 0)^T$  có phải là nghiệm tối ưu địa phương không? Vì sao? Nếu không, hãy tìm một hướng giảm  $p$  của hàm  $f(x)$  tại  $x^0$ .
- (iii) Trên tia xuất phát từ  $x^0$  theo hướng  $p$  em đã chọn ở phần (ii), hãy tìm một điểm  $x^1$  tốt hơn  $x^0$  theo phương pháp tìm chính xác theo tia.

**Câu 4. (2.0 đ)** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính  $\max\{\langle c, x \rangle \mid x \in D\}$ , trong đó  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  và  $D \subset \mathbb{R}^n$  là một đa diện.

- (i) Cho đỉnh  $v^0 \in D$ . Giả sử rằng  $v^0$  có đúng  $k$  đỉnh kề là  $v^1, v^2, \dots, v^k$  và

$$\langle c, v^0 \rangle \geq \langle c, v^i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

$$\text{CMR: } v^0 \in \operatorname{argmax}\{\langle c, x \rangle \mid x \in D\}.$$

- (ii) Định nghĩa tập lồi. CMR: tập nghiệm của bài toán QHTT là tập lồi.

**Câu 5. (1.0 đ)** Cho bài toán  $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ . CMR: Nếu sử dụng phương pháp Newton thuần túy để giải bài toán này với  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ , trong đó  $A$  là ma trận cấp  $n$ , đối xứng, xác định dương, không suy biến,  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ , thì ta sẽ nhận được ngay một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán này chỉ sau một vòng lặp và không phụ thuộc vào điểm xuất phát ban đầu.

**Note:** - Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.  
- Nộp lại đề thi cùng bài thi.