

- Chú ý:**
- Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
 - **Nộp lại đề thi cùng bài thi.**
 - Giá trị của α trong đề thi này **bằng chữ số cuối cùng của MSSV của sinh viên.**

Câu 1. (1.0đ) Cho bài toán $\max\{f(x) \mid x \in X\}$, trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, hàm $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R}^n . Giả sử $\hat{x} \in \text{int}X$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán này. CMR: $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Câu 2. (3.0 đ) Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm là P1 và P2. Để sản xuất mỗi loại sản phẩm, nhà máy cần sử dụng hai loại nguyên liệu là A và B. Mỗi đơn vị sản phẩm P1 cần 2 kg nguyên liệu A và 1 kg nguyên liệu B, mỗi đơn vị sản phẩm P2 cần 1 kg nguyên liệu A và 3 kg nguyên liệu B. Nhà máy có 200 kg nguyên liệu A và 300 kg nguyên liệu B. Lợi nhuận thu được từ mỗi đơn vị sản phẩm P1 là 40 nghìn đồng và từ mỗi đơn vị sản phẩm P2 là 60 nghìn đồng. Ngoài ra, nhà máy phải sản xuất tối thiểu 20 đơn vị sản phẩm P1. Hãy xác định số lượng sản phẩm P1 và P2 cần sản xuất để tối đa hóa lợi nhuận.

- Viết mô hình toán học của bài toán trên và ký hiệu là bài toán (P). Sau đó giải bài toán (P) bằng phương pháp hình học.
- Viết bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P). Sử dụng các định lý về đối ngẫu và nghiệm của bài toán (P) để tìm nghiệm của bài toán (D).

Câu 3. (2.0 đ) Xét bài toán

$$\max h(x) = \langle d, x \rangle \text{ với điều kiện } x \in M, \quad (P_2)$$

trong đó véc tơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $M \subset \mathbb{R}^n$ là một đa diện khác rỗng.

- Chứng minh rằng: bài toán (P_2) có nghiệm tối ưu và tập nghiệm tối ưu là một diện của M .
- Cho u^0 là đỉnh của đa diện M . Giả sử có đúng h đỉnh kề với u^0 là u^1, u^2, \dots, u^h và

$$\langle d, u^0 \rangle \geq \langle d, u^i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, h.$$

Chứng minh u^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_2) .

Câu 4. (2.0 đ) Chưa cần giải em hãy cho biết bài toán $\min\{\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1\}$ có nghiệm tối ưu hay không, vì sao? Nếu có, hãy giải bài toán này bằng phương pháp nhân tử Lagrange.

Câu 5. (2.0 đ) (i) Trình bày thuật toán Newton thuần túy giải bài toán $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, trong đó $f(x)$ là hàm khả vi thỏa mãn $\nabla^2 f(x)$ xác định dương với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

- Giải bài toán $\min\{f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + (\alpha + 1)x_1 - 4x_2 \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ bằng thuật toán Newton thuần túy với điểm xuất phát $x^0 = (0, 0)^T$.

- Chú ý:**
- Không sử dụng tài liệu, không ghi chép lên đề thi.
 - **Nộp lại đề thi cùng bài thi.**
 - Giá trị của α trong đề thi này **bằng chữ số cuối cùng của MSSV của sinh viên.**

Câu 1. (1.0đ) Cho bài toán $\max\{f(x) \mid x \in X\}$, trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, hàm $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R}^n . Giả sử $\bar{x} \in \text{int}X$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán này. CMR: $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Câu 2. (3.0đ) Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm là S1 và S2. Để sản xuất mỗi loại sản phẩm, nhà máy cần sử dụng hai loại nguyên liệu là A và B. Mỗi đơn vị sản phẩm S1 cần 2 kg nguyên liệu A và 1 kg nguyên liệu B, mỗi đơn vị sản phẩm S2 cần 1 kg nguyên liệu A và 3 kg nguyên liệu B. Nhà máy có 200 kg nguyên liệu A và 300 kg nguyên liệu B. Lợi nhuận thu được từ mỗi đơn vị sản phẩm S1 là 40 nghìn đồng và từ mỗi đơn vị sản phẩm S2 là 60 nghìn đồng. Ngoài ra, nhà máy phải sản xuất tối thiểu 20 đơn vị sản phẩm S1. Hãy xác định số lượng sản phẩm S1 và S2 cần sản xuất để tối đa hóa lợi nhuận.

- Viết mô hình toán học của bài toán trên và ký hiệu là bài toán (P). Sau đó giải bài toán (P) bằng phương pháp hình học.
- Viết bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P). Sử dụng các định lý về đối ngẫu và nghiệm của bài toán (P) để tìm nghiệm của bài toán (D).

Câu 3. (2.0 đ) Xét bài toán

$$\max h(x) = \langle c, x \rangle \text{ với điều kiện } x \in M, \quad (P_1)$$

trong đó véc tơ $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $M \subset \mathbb{R}^n$ là đa diện khác rỗng.

- Chứng minh rằng: bài toán (P_1) có nghiệm tối ưu và tập nghiệm tối ưu là một diện của M .
- Cho v^0 là đỉnh của đa diện M . Giả sử có đúng h đỉnh kề với v^0 là v^1, v^2, \dots, v^h và

$$\langle c, v^0 \rangle \geq \langle c, v^i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, h.$$

Chứng minh v^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) .

Câu 4. (2.0 đ) Chưa cần giải em hãy cho biết bài toán $\min\{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1\}$ có nghiệm tối ưu hay không, vì sao? Nếu có, hãy giải bài toán này bằng phương pháp nhân tử Lagrange.

- Câu 5. (2.0 đ)**
- Trình bày thuật toán Newton thuần túy giải bài toán $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, trong đó $f(x)$ là hàm khả vi thỏa mãn $\nabla^2 f(x)$ xác định dương với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.
 - Giải bài toán $\min\{f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + (\alpha + 1)x_1 - 8x_2 \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ bằng thuật toán Newton thuần túy với điểm xuất phát $x^0 = (0, 0)^T$.